УДК 533.6.011

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ КАНАЛА ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

В.М. Галкин

Томский политехнический университет
E-mail: vlg@tpu.ru

Для дифференциальных уравнений, описывающих одномерное стационарное течение с переходом через скорость звука, предлагаются зависимости в правых частях этих уравнений, позволяющие получить аналитические выражения для параметров газа в канале постоянного сечения.

1. Введение

При решении стационарных газодинамических задач возникает проблема апробации разработанных программ путем сравнения с точными решениями. Для нестационарных течений таких решений достаточно много [1], в то время как для стационарных – значительно меньше. Прежде всего, это уравнения, описывающие течение от источника (стока), и трансцендентное уравнение, описывающее одномерное распределение числа Маха вдоль канала переменного сечения при изоэнтальпическом, изоэнтропическом течении идеального совершенного газа [2]:

$$\frac{\min(A)}{A} = M\left(\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2}\right)^{(\gamma+1)/(2(\gamma-1))}, \qquad (1)$$

где: $M=U\sqrt{\rho/(\gamma P)}$ – число Маха; ρ, U, P, A, γ – плотность, скорость, давление, площадь поперечного сечения сопла, показатель адиабаты газа. Большинство других решений базируется на (1). Так, в [3] нахождение параметров двухфазного течения сводится к решению уравнения (1) путем использования гипотезы о законе отставания частиц и введением некоторого эффективного показателя адиабаты.

В данной работе предлагаются зависимости в правых частях уравнения движения и энергии, при которых дифференциальные уравнения имеют точное решение в виде трансцендентного уравнения для распределения числа Маха вдоль канала постоянного сечения, и явные выражения для остальных параметров газа. Более простые соотношения приведены в [4].

2. Исходные уравнения

Рассмотрим одномерные стационарные уравнения для идеального совершенного газа в канале постоянного сечения:

$$\frac{d\rho U}{dx}=0, \quad \frac{d(\rho U^2+P)}{dx}=C_1, \quad \frac{d\rho UH}{dx}=C_2, \qquad (2)$$

где: $H=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho}+\frac{U^2}{2}$ – полная энтальпия; x – продольная координата, принадлежащая рассматриваемой области $[x_a;x_b]$; C_1 и C_2 – правые части уравнений движения и энергии.

Полагается, что: γ=const; заданы граничные условия на входе в сопло в виде $H=H(x_a)$, $S=S(x_a)$, $C_1(x_a)=C_2(x_a)=0$; внутри рассматриваемой области число Маха монотонно возрастает от дозвуковой до сверхзвуковой величины, и существует только одна точка x_*, в которой M=1.

Переходя к переменным H, S, M, N и используя вместо уравнения неразрывности его интеграл, перепишем уравнения (2) в следующем виде:

$$\frac{dS}{dx}=\left(\frac{C_2}{U}-C_1\right)\frac{(\gamma-1)}{\rho^{\gamma}}, \quad \frac{dH}{dx}=\frac{C_2}{\rho U}, \qquad (3)$$

$$\left(\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2}\right)^{H_0} M=\frac{\min(N)}{N}, \qquad (4)$$

где:

$$N=\left(\frac{H}{H_0}\right)^{H_0}\left(\frac{S}{S_0}\right)^{f}, \qquad (5)$$

$$S=\frac{P}{\rho^{\gamma}},\ H_0=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)},\quad S_0=\frac{1}{\gamma},\quad f=\frac{1}{1-\gamma}.$$

Старые переменные выражаются через новые с использованием формул:

$$U=M\sqrt{\frac{2(\gamma-1)H}{2+(\gamma-1)M^2}},\quad \rho=\frac{\min(N)}{U},\quad P=S\rho^{\gamma}. \qquad (6)$$

С учетов вышеупомянутых ограничений на число Маха можно показать [5], что для N получается необходимое и достаточное условие существования в точке x_* единственного минимума:

$$\min(N)=N(x_*),\quad \left.\frac{dN}{dx}\right|_{x_*}=0,\quad \left.\frac{d^2N}{dx^2}\right|_{x_*}>0. \qquad (7)$$

Произведем обезразмеривание отнесением x – к ширине канала, U – к критической скорости U_*, ρ – к критической плотности ρ_*, P – к произведению $\rho_* U_*^2$. Тогда $H(x_a)=H_0$ и $S(x_a)=S_0$. Подставляя последние два выражения в (5) получим граничное условие для N:

$$N(x_a)=1. \qquad (8)$$

3. Точные решения

Пусть заданы x_*, b_1, b_2, причем $x_a<x_*<x_b$, $0\le b_1$, $0<b_2<1$. Рассматривая простейшие зависимости, представим S в виде линейной функции, удовлетворяющей граничным условиям и условию не убывания энтропии, а N – в виде квадратичной функции, удовлетворяющей (7, 8):

$$S=S_0(b_1(x-x_a)+1), \qquad (9)$$

$$N=b_2\left(\frac{x-x_*}{x_a-x_*}\right)^2+1-b_2. \qquad (10)$$

Тогда число Маха находится из трансцендентного уравнения (4), точное решение для H получается из (5):

$$H=H_0\left(N\left(\frac{S_0}{S}\right)^{f}\right)^{\frac{1}{H_0}},$$

а остальные параметры находятся из (6). Дифференцируя (5) по "x" и, используя (3), получим соотношения для C_1, C_2, которые можно использовать в (2) для численного решения:

$$C_2=\frac{UH\rho}{H_0}\left(\frac{N'}{N}-f\frac{S'}{S}\right),\quad C_1=\frac{C_2}{U}+f\rho^{\gamma}S', \qquad (11)$$

причем N, S, N', S' в (11) берутся из (9), (10). Штрих обозначает производную по "x". Очевидно, что если в (9) положить $b_1=0$, то этому будет соответствовать случай $S=S_0=\text{const}$.

Для $H=H_0=\text{const}$ и (10) число Маха находится из (4), точное решение для S получается из (5):

$$S=S_0N^{\frac{1}{f}},$$

остальные параметры из (6). Естественно, что в этом случае энтропийная функция на определенном участке может убывать. Правые части для ур. (2) получаются из ур. (3) и (5):

$$C_2=0,\quad C_1=P\frac{N'}{N}, \qquad (12)$$

где N и N' берутся из (10).

Очевидно, что в предложенных соотношениях распределение числа Маха, определяемое из (4), зависит только от величин x_a, x_*, b_2 в (10).

4. Численные расчеты

На рис. 1 приведено распределение числа Маха вдоль канала, полученное из ур. (4) и (10) при значениях $\gamma=1{,}4$, $x_a=-4$, $x_*=0$, $x_b=2$, $b_2=\{0{,}1;\ 0{,}5;\ 0{,}9\}$.

Для предложенных правых частей ур. (11, 12) был проведен ряд расчетов методом установления по явной схеме Мак-Кормака [6] для нестационарного аналога ур. (2):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho U}{\partial x}=0,\ \frac{\partial\rho U}{\partial t}+\frac{\partial(\rho U^2+P)}{\partial x}=C_1,$$

$$\frac{\partial(\rho H-P)}{\partial t}+\frac{\partial\rho UH}{\partial x}=C_2,$$

число точек сетки при этом равнялось 40. Начальное распределение, показанное на рис. 1, находилось из соотношений:

$$U=0{,}18(x+2)+1,\quad \rho=\left(\left(H_0-\frac{U^2}{2}\right)\frac{\gamma-1}{\gamma S_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}},\quad P=S_0\rho^{\gamma},$$

что соответствует начальному положению точки $x_*=-2$.

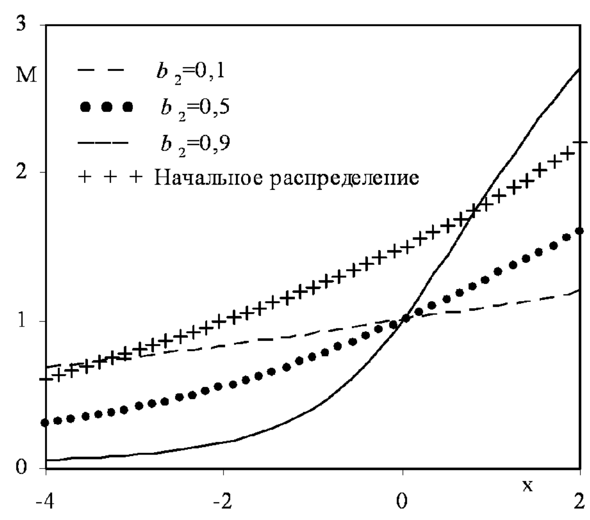


Рис. 1. Распределение числа Маха вдоль канала

В процессе установления при использовании правых частей ур. (11, 12) и некоторого значения b_2, распределение числа Маха вдоль канала будет сходиться к соответствующей кривой на рис. 1, при этом положение точки x_* будет сходиться к 0.

На рис. 2 и рис. 3 показано положение самой левой из точек x_* в процессе установления.

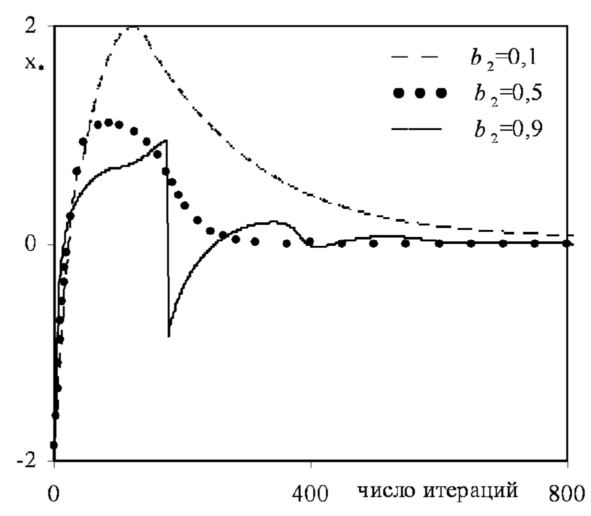


Рис. 2. *Положение x_* в процессе установления при b_1=0,4*

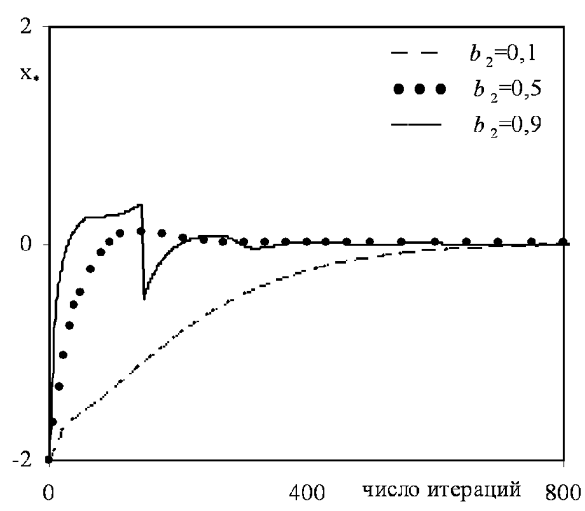


Рис. 3. *Положение x_* в процессе установления при H=const*

Видно, что при b_1=0,4 и правых частях (11) амплитуда колебаний больше, чем при правых частях (12). Как видно из рисунков, во всех расчетах положение точки x_* сходится к точному значению, равному 0, причем во всех случаях остается только одна точка x_*.

Несмотря на то, что метод установления демонстрирует сходимость к точному решению и предельное распределение числа Маха вдоль канала, полученное при 2000 итераций (рис. 4) отличается от точного, изображенного на рис. 1 в третьем знаке после запятой, на промежуточных итерациях вполне возможно нарушение монотонности и появление нескольких точек x_*, что демонстрирует рис. 4. На рис. 2 и рис. 3 резкие скачки при b_2=0,9 как раз связаны с наличием нескольких точек x_* и сопровождающейся при этом перестройкой течения.

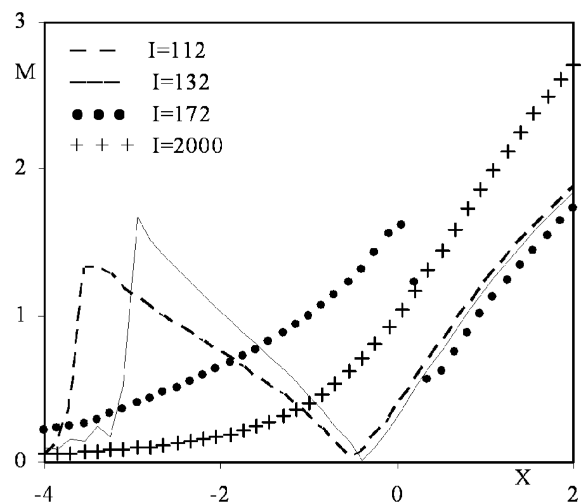


Рис. 4. *Распределение числа Маха вдоль канала для разных итераций. I — номер итерации*

5. Заключение

Предложены аналитические формулы, позволяющие находить распределение параметров газа с переходом через скорость звука в канале постоянного сечения. Эти формулы целесообразно использовать при тестировании соответствующих численных методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Комаровский Л.В., Шабловский О.Н. Аналитическое исследование внутренних задач нестационарной газовой динамики и переноса тепла. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1981. – 208 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
3. Стернин Л.Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. – М.: Машиностроение, 1974. – 212 с.
4. Галкин В.М. О методе решения одномерных стационарных уравнений газовой динамики. // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15. – № 11. – С. 30–36.
5. Галкин В.М. Итерационный метод решения одномерных уравнений газовой динамики // Известия Томского политехнического университета. – 2002. – Т. 305. – № 8. – С. 130–136.
6. MacCormack R.W. The effect of viscosity in hyperbolicity impact cratering // AIAA Paper. – 1969. – V. 69. – P. 354.